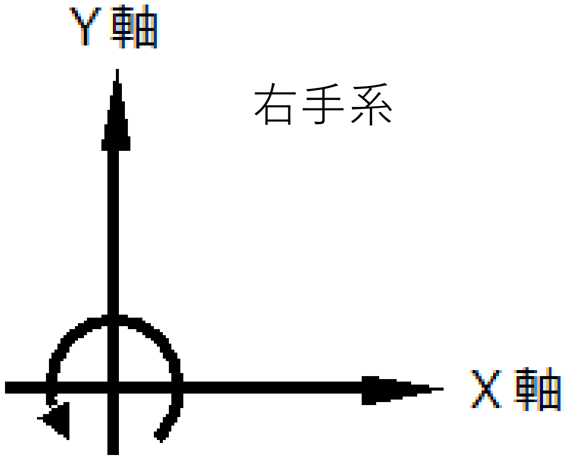
電子銃ビームラインを理解するための、回転行列、x-y結合のメモ

1. 回転方向の定義（右手系）、位相空間の回転行列
2. 4極磁石の転送行列、および回転角度を与えた場合の転送行列について
3. 輸送路全体の転送行列の求め方と、X-Y結合の意味、および、r1~r4パラメータについて
4. 電子銃テストベンチの直線部の寸法
5. 自由空間の転送行列の入力パラメータ
6. 回転4極の転送行列の入力パラメータ
7. 直線部の転送行列の具体値　（K=A*I, A=101.5を使用）
8. 補足資料：転送行列に入力する4極のK値と、4極の磁場勾配g[T/m]について。
9. 補足資料：ベンド、4極、自由空間の4行4列転送行列

1. 座標の回転、位相空間の回転

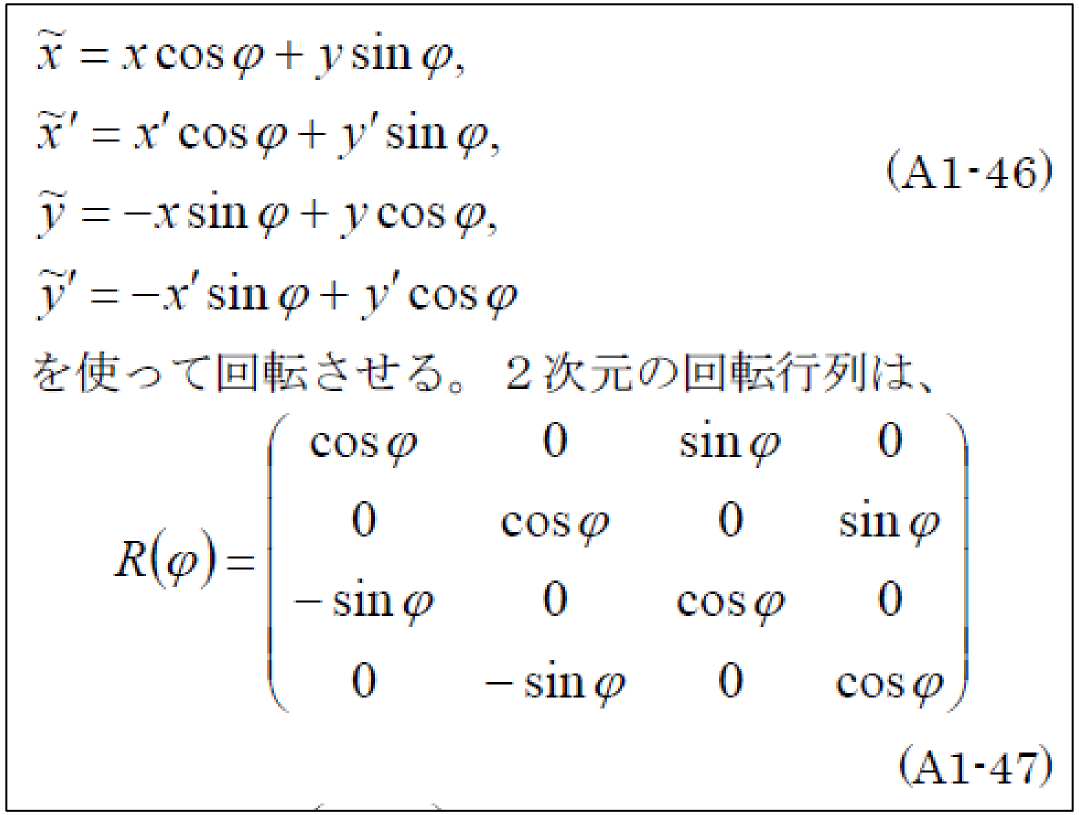


$$X = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$Y = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

位相空間を角度φで回転させる場合の回転行列は



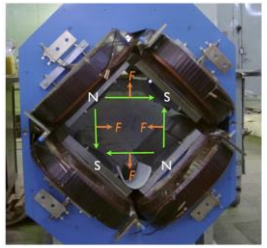
$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ \tilde{x}' &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ \tilde{y} &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ \tilde{y}' &= -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{(A1-46)}$$

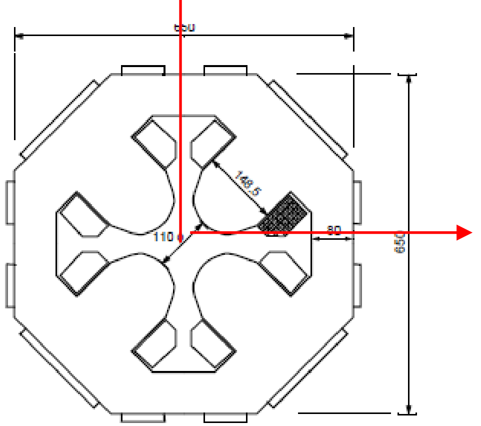
を使って回転させる。２次元の回転行列は、

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

(A1-47)

2. 4極の転送行列の回転





ノーマル4極磁石の転送行列をDとすると、D=$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_1 \end{bmatrix}$

$a_1 = cos\sqrt{K}\mathrm{L}, a_2 = L\frac{sin\sqrt{K}L}{\sqrt{K}L}, a_3 = -KL\frac{sin\sqrt{K}L}{\sqrt{K}L}$

$b_1 = cosh\sqrt{K}L, b_2 = \frac{1}{\sqrt{K}}sinh\sqrt{K}L, b_3 = \sqrt{K}sinh\sqrt{K}L$　ただし、K>0の時。

（K<0のときは、a←→bとすれば良い）

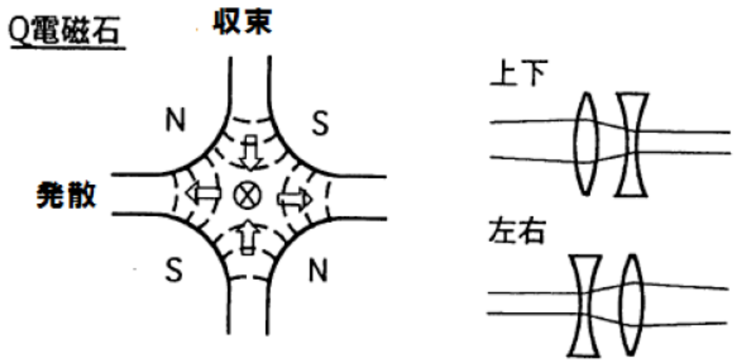


図 8　四極電磁石とビーム収束の原理。

4極磁石1つを、角度φだけ回転させると、$M = R(\varphi)^{-1}DR(\varphi)$

$$B_x = \frac{B_0}{a}y$$

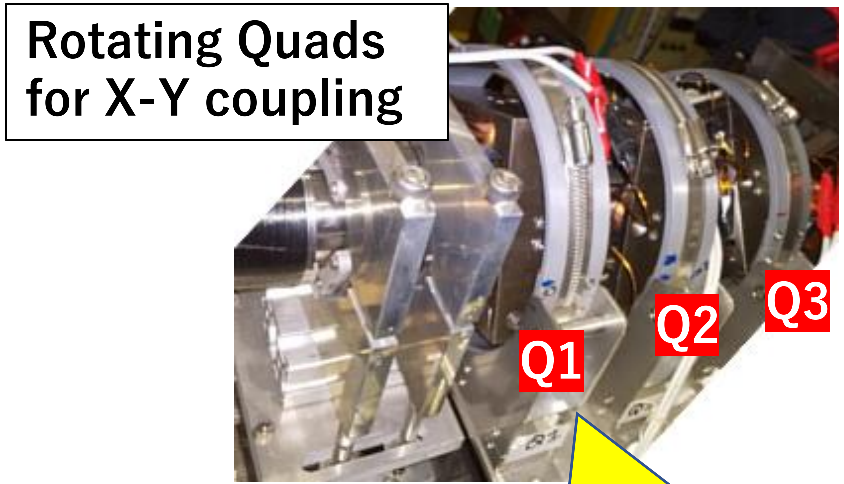
$$B_y = \frac{B_0}{a}x$$

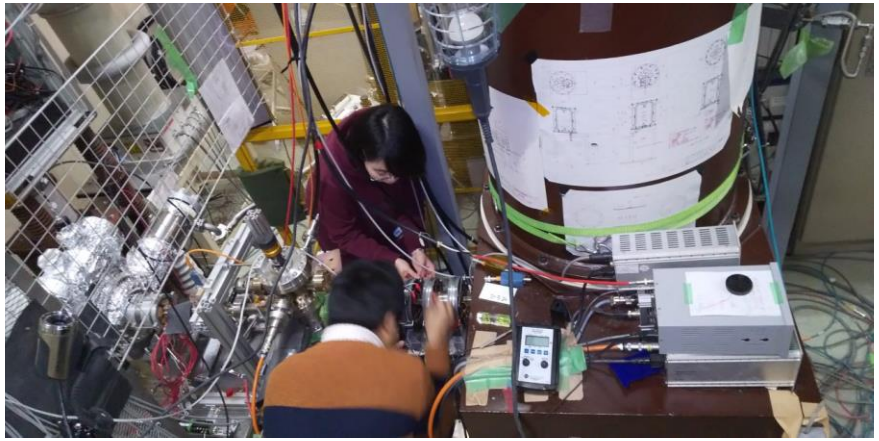
k=$\frac{e}{P}\frac{B_0}{a}$

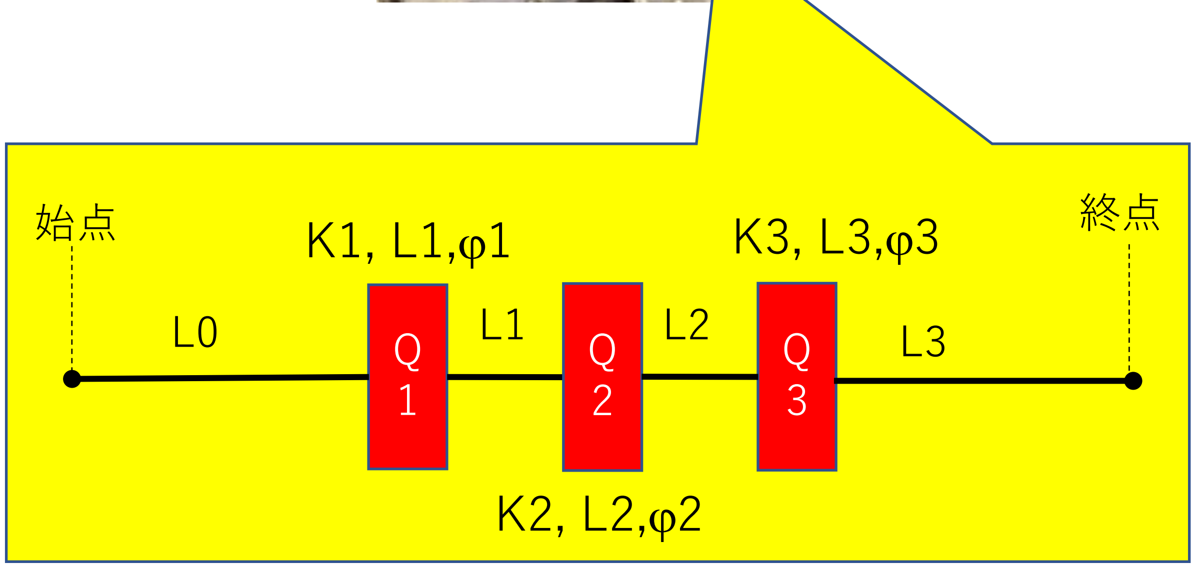
$$M = \begin{bmatrix} a_1C^2 + b_1S^2 & a_2C^2 + b_2S^2 & a_1CS - b_1CS & a_2CS - b_2CS \\ a_3C^2 + b_3S^2 & a_1C^2 + b_1S^2 & a_3CS - b_3CS & a_1CS - b_1CS \\ a_1CS - b_1CS & a_2CS - b_2CS & a_1S^2 + b_1C^2 & a_2S^2 + b_2C^2 \\ a_3CS - b_3CS & a_1CS - b_1CS & a_3S^2 + b_3C^2 & a_1S^2 + b_1C^2 \end{bmatrix}$$

ただし、C=cosφ, S=sinφ

3. 例えば、任意角度に回転させる4極を複数個並べる場合（例として電子銃テストベンチ）







全体の転送行列$T = L_3 Q_3 L_2 Q_2 L_1 Q_1 L_0$

行列Tを区分対角化して、$T = U^{-1} D U$

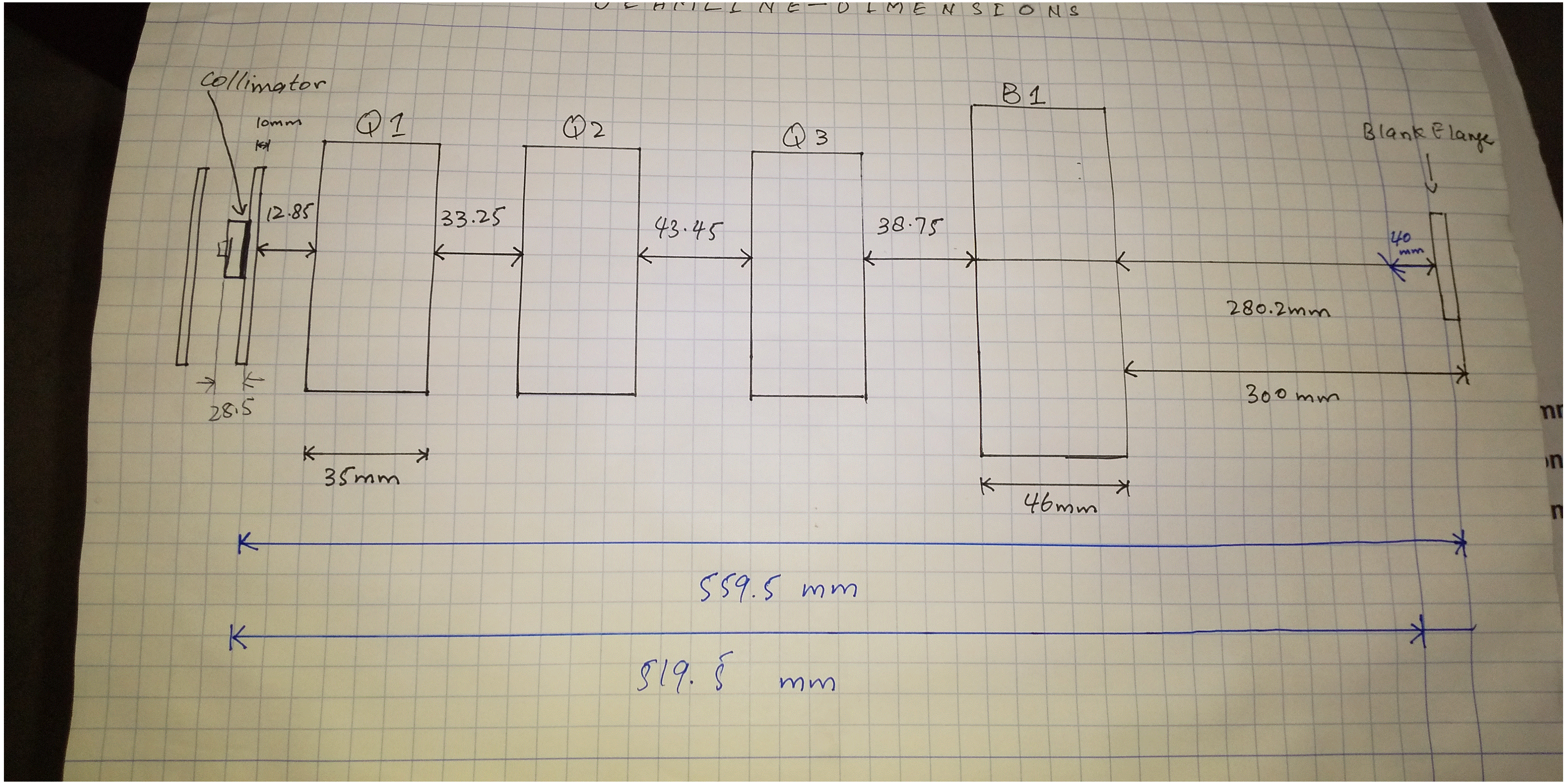
ただし、

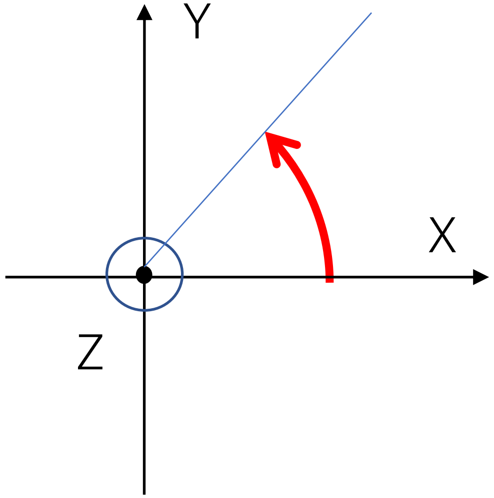
$$D = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \mu I & J^t R J \\ R & \mu I \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

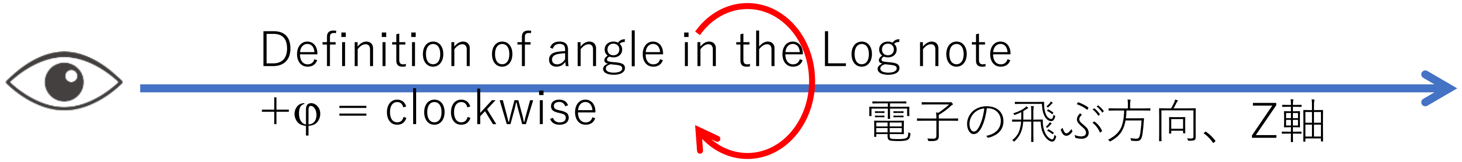
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}, \mu^2 + detR = 1$$

「X-Y結合調整」というのは回転角や、K値を変えて、「$r_1 \sim r_4$ を調整する」ことです。

4. 電子銃テストベンチの実際のパラメータ





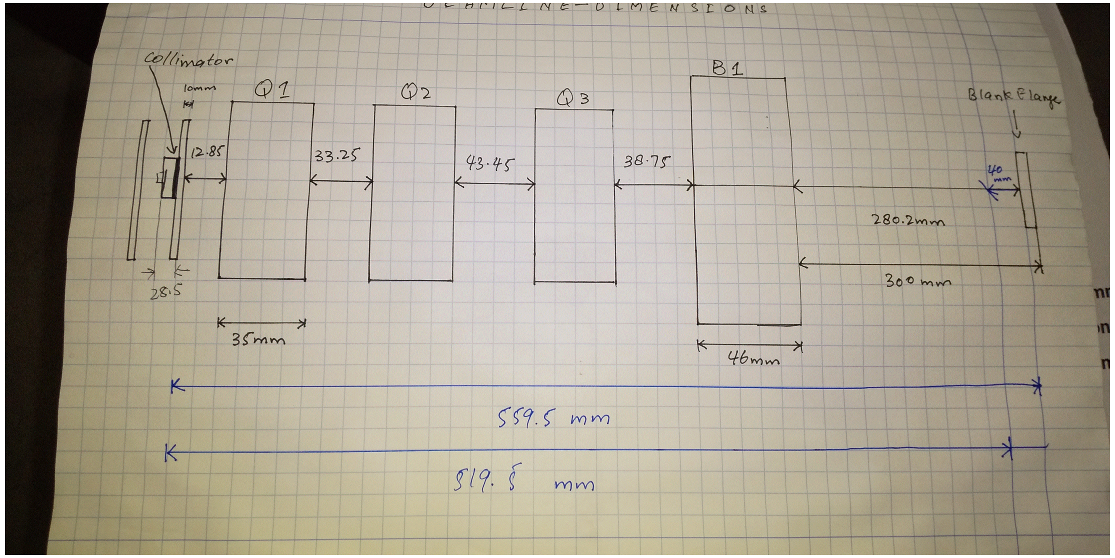


Definition of angle in the Log note

+φ = clockwise

電子の飛ぶ方向、Z軸

5. 直線部の転送行列:自由空間



lq(4極の有効長)=0.056[m]
d(4極の磁極長)=0.035[m]

$$\mathrm{L}_i = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & l_i \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & l_i \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

i=0,1,2,3

自由空間の長さまとめ：
始点からQ1まで　l_0=12.85*1E-3-(lq-d)*0.5=0.002350
Q1とQ2の間　l_1=33.25*1E-3-(lq-d)=0.012250
Q2とQ3の間　l_2=43.45*1E-3-(lq-d)=0.022450
Q3から直線部終端まで　l_3=(280+46+38.75)*1E-3-(lq-d)*0.5=0.354450

6. 直線部の転送行列:回転4極

$$Q_i = \begin{bmatrix} a_1C^2 + b_1S^2 & a_2C^2 + b_2S^2 & a_1CS - b_1CS & a_2CS - b_2CS \\ a_3C^2 + b_3S^2 & a_1C^2 + b_1S^2 & a_3CS - b_3CS & a_1CS - b_1CS \\ a_1CS - b_1CS & a_2CS - b_2CS & a_1S^2 + b_1C^2 & a_2S^2 + b_2C^2 \\ a_3CS - b_3CS & a_1CS - b_1CS & a_3S^2 + b_3C^2 & a_1S^2 + b_1C^2 \end{bmatrix}$$

$a_1 = cos\sqrt{K_i}l_q, a_2 = l_q \frac{sin\sqrt{K_i}l_q}{\sqrt{K_i}l_q}, a_3 = -K_i l_q \frac{sin\sqrt{K_i}l_q}{\sqrt{K_i}l_q}$

$b_1 = cosh\sqrt{K_i}l_q, b_2 = \frac{1}{\sqrt{K_i}}sinh\sqrt{K_i}l_q, b_3 = \sqrt{K_i}sinh\sqrt{K_i}l_q$　ただし、K>0の時。

（K<0のときは、a←→bとすれば良い）

$C = cos\varphi_i, S = sin\varphi_i$

i=1,2,3

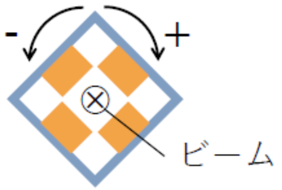
Best 1	Q1	Q2	Q3
k値（$/m^2$）	-21.0	-67.1	21.0
回転角（度）	0.0	15.0	-45.0

k値

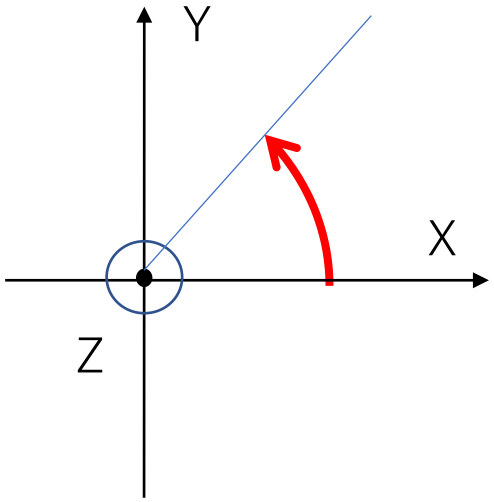
＋：水平方向収束

ー：垂直方向収束

回転角



Best 2	Q1	Q2	Q3
k値（$/m^2$）	24.9	-69.0	0.864
回転角（度）	-20.0	25.0	-45.0



2021/12/13改

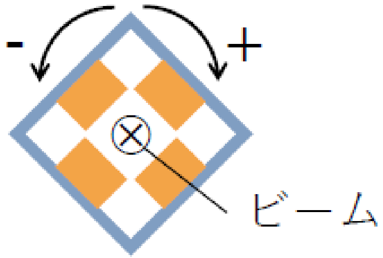
SADを用いる際は、転送行列に入れる回転角度の符号の定義が逆になっていることに注意すること！

7. 転送行列の具体数値

k値

＋：水平方向収束
ー：垂直方向収束

回転角

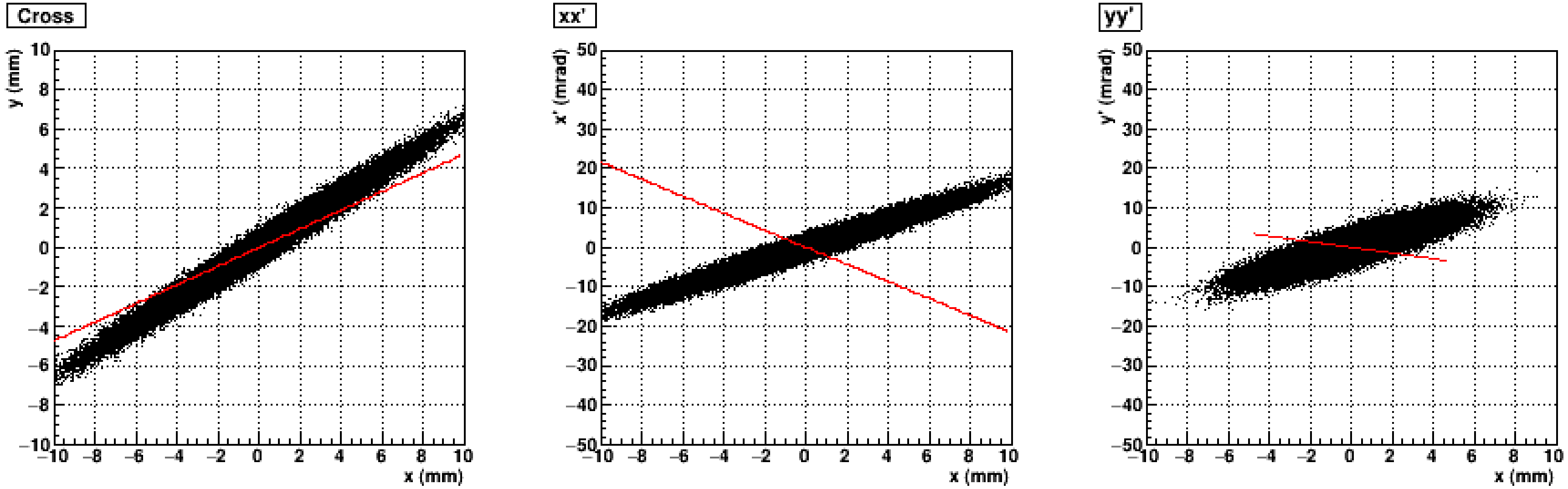


Best 2	Q1	Q2	Q3
k値（$/m^2$）	24.9	-69.0	0.864
回転角（度）	-20.0	25.0	-45.0

（K=A*I, A=101.5を使用）

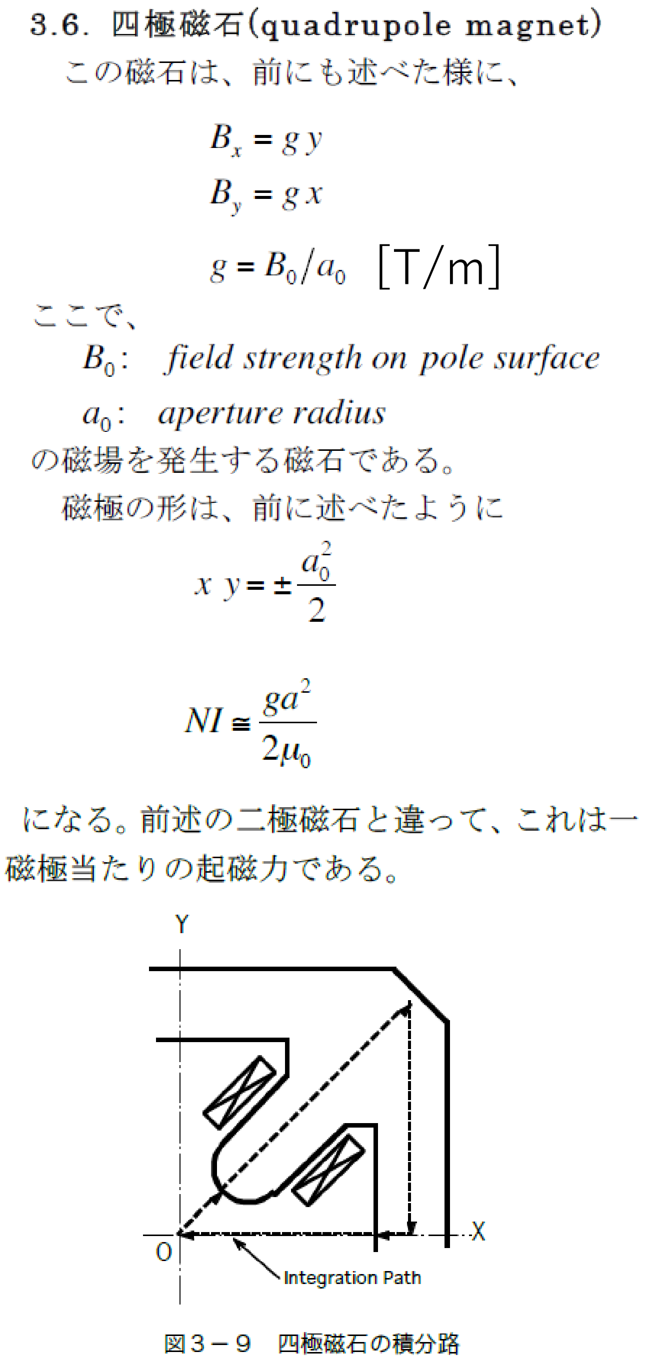
全体の転送行列$T = L_3Q_3L_2Q_2L_1Q_1L_0$

$$\begin{pmatrix} 1.698594e+00 & 6.669054e-01 & 2.156214e+00 & 1.647206e-01 \\ 1.688048e+00 & 1.239567e+00 & 4.550331e+00 & 3.570058e-01 \\ 1.782256e+00 & 1.553516e-01 & 4.766825e-01 & 4.652768e-01 \\ 3.732921e+00 & 3.367433e-01 & -1.296083e+00 & 7.902852e-01 \end{pmatrix}$$



赤線は、OPERAで見積もった理想的な相関

8. 補足資料：K値について。



3.6. 四極磁石(quadrupole magnet)

この磁石は、前にも述べた様に、

$$B_x = g\,y$$
$$B_y = g\,x$$
$$g = B_0/a_0 \quad [\mathrm{T/m}]$$

ここで、

B_0: *field strength on pole surface*

a_0: *aperture radius*

の磁場を発生する磁石である。

磁極の形は、前に述べたように

$$x\,y = \pm\frac{a_0^2}{2}$$

$$NI \cong \frac{g a^2}{2\mu_0}$$

になる。前述の二極磁石と違って、これは一磁極当たりの起磁力である。

図３－９　四極磁石の積分路

$$\frac{e}{p_0}B' = \frac{B'}{B_0\rho} = K$$

μ0=4π*1E-7

$$B\rho[T.m] = \frac{P[GeV/c]}{e} \sim \frac{P}{0.3}$$

4極の転送行列に入れるK値とgの関係は

$$K = \frac{B_0}{a_0}\frac{1}{B\rho} = \frac{g}{B\rho}$$

電子銃の4極は
N=25, a=0.025
よって、Ｉと　Kの関係は

$$NI \sim \frac{B\rho K a^2}{2\mu_0}$$
$$K = \frac{2\mu_0}{a^2}\frac{N}{B\rho}I$$
$$K = 101.57 \times I$$

本番実験は　P=0.3GeV/cなので、$B\rho = 1$、つまり、$K = g$

電子銃の場合、E=80keV, p=297*1E-6 GeV/c, $B\rho = \frac{300E-6}{0.3}$=1E-3

K=1000g

9. 転送行列の公式(OHO09 中山先生)

(1) 二極磁場のマトリックスは

$$M_x = \begin{bmatrix} \cos k_x L & \frac{1}{k_x}\sin k_x L & \frac{h}{k_x^2}(1-\cos k_x L) \\ -k_x \sin k_x L & \cos k_x L & \frac{h}{k_x}\sin k_x L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_y = \begin{bmatrix} \cos k_y L & \frac{1}{k_y}\sin k_y L & 0 \\ -k_y \sin k_y L & \cos k_y L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$k_x^2 = (1-n)h^2, \quad k_y^2 = nh^2$$

である。

(2) 四極磁場は

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} \cos k_q L & \frac{1}{k_q}\sin k_q L & 0 \\ -k_x \sin k_q L & \cos k_q L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{y,x} = \begin{bmatrix} \cosh k_q L & \frac{1}{k_q}\sinh k_q L & 0 \\ -k_q \sinh k_q L & \cosh k_q L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_q^2 = -nh^2 = \frac{B_0}{a}\frac{1}{B\rho}$$

になる。

(3) ドリフトスペースは

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。いずれの場合も、L は要素の長さ